Homework 6

2021 年 12 月 3、10 日布置

2021 年 12 月 17 日交

1

对度规：

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= F(r)dt^2 - 2E(r)dt(\vec{x}\cdot d\vec{x}) - D(r)(\vec{x}\cdot d\vec{x})^2 - C(r)(d\vec{x})^2 \\ &= F(r)dt^2 - 2rE(r)dtdr - r^2D(r)dr^2 - C(r)[dr^2 + r^2d\Omega^2] \end{aligned}$$

进行坐标变换 $t' \equiv t + \Phi(r)$，其中 $\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{rE(r)}{F(r)}$ 后，度规变换为：

$$d\tau^2 = F(r)dt'^2 - G(r)dr^2 - C(r)[dr^2 + r^2d\Omega^2]$$

其中 $G(r) \equiv r^2[D(r) + \frac{(E(r))^2}{F(r)}]$

2 光线偏折

在牛顿力学与 GR 中分别计算太阳对光线的偏折。

牛顿力学中用到的方程 (角动量守恒与机械能守恒)

$$L = r^2\frac{d\varphi}{dt} = const$$
$$E = \frac{1}{2}(\frac{dr}{dt})^2 + \frac{L^2}{2r^2} = const$$

最终光子轨道方程形式为

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 0$$

GR 中最终光子轨道方程为；

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3u^2$$

3 Eddington-Finkelstein ingoing 坐标

对 Schwarzschild 度规做坐标变换：

$$\begin{cases} \tilde{t} = t + 2GM\ln\left|\frac{r}{2GM} - 1\right| \\ \tilde{r} = r \end{cases}$$

证明变换后的度规为：

$$ds^2 = -(1 - \frac{2GM}{\tilde{r}})d\tilde{t}^2 + (1 + \frac{2GM}{\tilde{r}})d\tilde{r}^2 + \frac{4GM}{\tilde{r}}d\tilde{r}d\tilde{t} + \tilde{r}^2d\Omega^2$$