Homework 2 Answer

1

$$
\begin{aligned}
& dT = \sinh t\ dx + x\cosh t\ dt \\
& dX = \cosh t\ dx + x\sinh t\ dt \\
\Rightarrow\quad & dt = \frac{\cosh t}{x}dT - \frac{\sinh t}{x}dX \\
& dx = -\sinh t\ dT + \cosh t\ dX
\end{aligned}
$$

故：

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -x^2\left(\frac{\cosh t}{x}dT - \frac{\sinh t}{x}dX\right)^2 + (-\sinh t\ dT + \cosh t\ dX)^2 + dY^2 + dZ^2 \\
&= -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2
\end{aligned}
$$

2

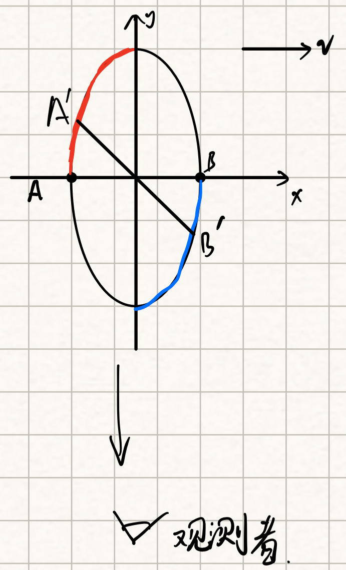
做坐标变换：$T = \frac{1}{t}, \qquad \Rightarrow t = \frac{1}{T}, dt = -T^{-2}dT$

线元变为：

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -T^4\, T^{-4} dT^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\
&= -dT^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2
\end{aligned}
$$

首先需强调，视觉形象取决于同一时刻接收到的光

在观测者系中，球变为椭球



椭圆方程为 $\frac{x^2}{R^2/\gamma^2}+\frac{y^2}{R^2}=1$

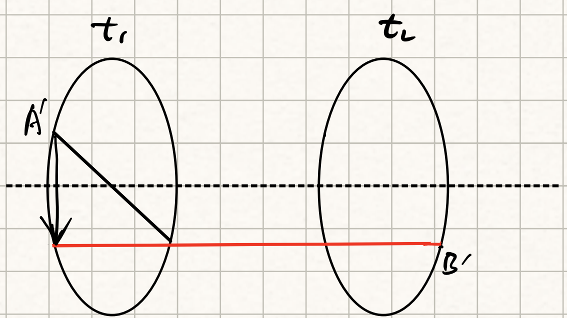
红色段上切线斜率大于 $\frac{c}{v}$ 的点发出的光都不被遮挡

蓝色段上切线斜率大于 $\frac{c}{v}$ 的点……都被遮挡

2个切线斜率为 $\frac{c}{v}$ 的点即为 A', B'.

可求出其坐标 $A'(-\frac{R}{\gamma^2}, \frac{v}{c}R)$, $B'(\frac{R}{\gamma^2}, -\frac{v}{c}R)$

接下来分析其视觉形象，设在 t_1 时刻 A' 发出的光在 t_2 时刻到达 B'.



∴红色范围为观测者同时接收的光.

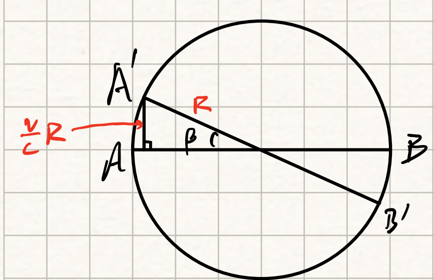
即视觉形象.

其长度为

$$2\frac{R}{\gamma^2}+v\cdot\frac{2v}{c}R/c=2R\left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{v^2}{c^2}\right)=2R$$

仍为其静止时直径.

故视觉形象相当于转动一个角度



在球静止系中，A' 与 AB 距离仍为 $\frac{v}{c}R$

∴ $\sin\beta=\frac{\frac{v}{c}R}{R}=\frac{v}{c}$