# Homework 1 Answer

## 1

Lorentz Boost 为

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & & \\ -\gamma v & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

仅考虑相对 x 方向的 Boost，以下省略 y，z。相继两次 Lorentz Boost 的变换矩阵为：

$$\begin{pmatrix} \gamma_2 & -\gamma_2 v_2 \\ -\gamma_2 v_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1 v_1 \\ -\gamma_1 v_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2(1+v_1v_2) & -\gamma_1\gamma_2(v_1+v_2) \\ -\gamma_1\gamma_2(v_1+v_2) & \gamma_1\gamma_2(1+v_1v_2) \end{pmatrix}$$

其中：

$$\begin{aligned} \gamma_1\gamma_2(1+v_1v_2) &= \frac{1+v_1v_2}{\sqrt{(1-v_1^2)(1-v_2^2)}} \\ &= 1 \Bigg/ \sqrt{\frac{1+v_1^2v_2^2-v_1^2-v_2^2}{1+v_1^2v_2^2+2v_1v_2}} \\ &= 1 \Bigg/ \sqrt{1-(\frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2})^2} \\ &\equiv \gamma_v \end{aligned}$$

故合变换矩阵为：

$$\begin{pmatrix} \gamma_v & -\gamma_v v & & \\ -\gamma_v v & \gamma_v & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

## 2

$$
\begin{aligned}
\vec{u}'\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{c^2}\right) &= \sqrt{1-v^2/c^2}\,\vec{u}+[(1-\sqrt{1-v^2/c^2})\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{v^2}-1]\vec{v} \\
\Rightarrow \quad u'^2\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{c^2}\right)^2 &= \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)u^2+\frac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}{c^2}+v^2-2\vec{u}\cdot\vec{v} \\
\Rightarrow \quad \left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{c^2}\right)^2 &= \left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{c^2}\right)^2-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{u^2}{c^2}-\frac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}{c^4}-\frac{v^2}{c^2}+2\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2} \\
\Rightarrow \quad \left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{c^2}\right)^2 &= \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)
\end{aligned}
$$

另一方程同理。

## 3

因为可由 Lorentz Boost 将任意 time-like 直线变换为某一惯性系的时间轴，故只需考虑沿着时间轴的 time-like 直线与一般曲线的长度。老师在课上已经说过，这里再重复一次，以从原点到 $(t_p, 0)$ 为例：
直线线长为：

$$
l=\int_0^p\sqrt{|\mathrm{d}s^2|}=\int_0^p\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t=\int_0^p\mathrm{d}t=t_p
$$

一般曲线：

$$
l=\int_0^p\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t<\int_0^p\mathrm{d}t=t_p
$$

对于 space-like 情况：Lorentz Boost 将任一 space-like 直线变换为某一惯性系的 x 轴，故只考虑沿着 x 轴的 space-like 直线与一般直线的长度。
直线线长为：

$$
l=\int_0^p\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x=\int_0^p\mathrm{d}x=x_p
$$

一般曲线：

$$
l=\int_0^p\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x<\int_0^p\mathrm{d}x=x_p
$$

故 time-like 和 space-like 都直线线长最大

## 4 选做题

由光速不变推导洛伦兹变换，即由 Minkowski 度规推导出 Lorentz 变换为等度规变换，参看梁灿彬《微分几何入门与广义相对论（上册)》第 95 页即可。在这里指出 Minkowski 时空的等度规群为 Poincaré 群，Lorentz 群为其子群。