EX5 为引入 Christoffel 联络，我们要求在 Riemann 空间中平移操作保证矢量的长度不变，即

$$g_{\mu\nu}(Q)A^{\mu}(P\to Q)A^{\nu}(P\to Q)=g_{\mu\nu}(P)A^{\mu}(P)A^{\nu}(P)$$

请利用 Taylor 展开式 $g_{\mu\nu}(Q)\approx g_{\mu\nu}(P)+g_{\mu\nu,\lambda}(P)dx^{\lambda}$，将上式保留到一阶小量，推导得到

$$g_{\mu\nu,\lambda}-g_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}-g_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}=0$$

EX6 请利用关系 $\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}=\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}$ 证明

$$R^{\rho}_{\lambda\mu\nu}+R^{\rho}_{\mu\nu\lambda}+R^{\rho}_{\nu\lambda\mu}=0$$

EX7 由 EX5 所证明的结果可以直接得到

$$R_{\rho\lambda\mu\nu}+R_{\rho\mu\nu\lambda}+R_{\rho\nu\lambda\mu}=0$$

请证明：该关系式可以等价地表述为 $R_{\rho[\lambda\mu\nu]}=0$ 以及 $R_{[\rho\lambda\mu\nu]}=0$。

EX8 对二维球面

$$ds^2=a^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

其中 a 为常数，计算 Ricci 标量，并说明高斯曲率：$K=-R/2$。(要求：至少要列出 Christoffel 联络、Riemann 张量、Ricci 张量所有的非零独立分量；提倡手算，编程计算的同学请在作业上附源代码。)

EX9 类似于逆变矢量的协变散度，推导张量的协变散度：

$$T^{\mu\nu}_{;\mu}=\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}T^{\mu\nu})_{,\mu}+\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}T^{\mu\lambda}$$

EX10 若 $A_{\mu\nu}$ 是反对称的，证明张量的旋度有如下关系：

$$\mathrm{curl}_{\mu\nu\lambda}(A_{\mu\nu})\equiv A_{\mu\nu;\lambda}+A_{\lambda\mu;\nu}+A_{\nu\lambda;\mu}=A_{\mu\nu,\lambda}+A_{\lambda\mu,\nu}+A_{\nu\lambda,\mu}$$