

Homework 3

2022 年 9 月 19、23 日布置

2022 年 9 月 26 日交

1 协变，逆变矢量

证明若 V_α 是协变矢量，则 $V^\alpha = \eta^{\alpha\beta} V_\beta$ 为逆变矢量

2 守恒流

四维流矢量

$$J^\alpha = \sum_n e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \frac{dx_n^\alpha(t)}{dt}$$

证明 $\partial J^\alpha(x)/\partial x^\alpha = 0$

3 Maxwell 方程

证明：

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

可以写成

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} F_{\gamma\delta} = 0$$

或

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F_{\beta\gamma} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} F_{\gamma\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\gamma} F_{\alpha\beta} = 0$$

其中 $F_{\gamma\delta} = \eta_{\gamma\alpha} \eta_{\delta\beta} F^{\alpha\beta}$

4

在考虑电磁场时， $T^{\alpha\beta} + T_{\text{em}}^{\alpha\beta}$ 是守恒量，利用 $\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = G^\alpha$ 来证明这一点，这时 G^α 中的 f^α 取电磁力

5 理想流体能动张量

证明在任意 Σ' 系中，理想流体的能动张量为

$$T^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta (-\vec{v}) \tilde{T}^{\gamma\delta} = p \eta^{\alpha\beta} + (p + \rho) U^\alpha U^\beta$$